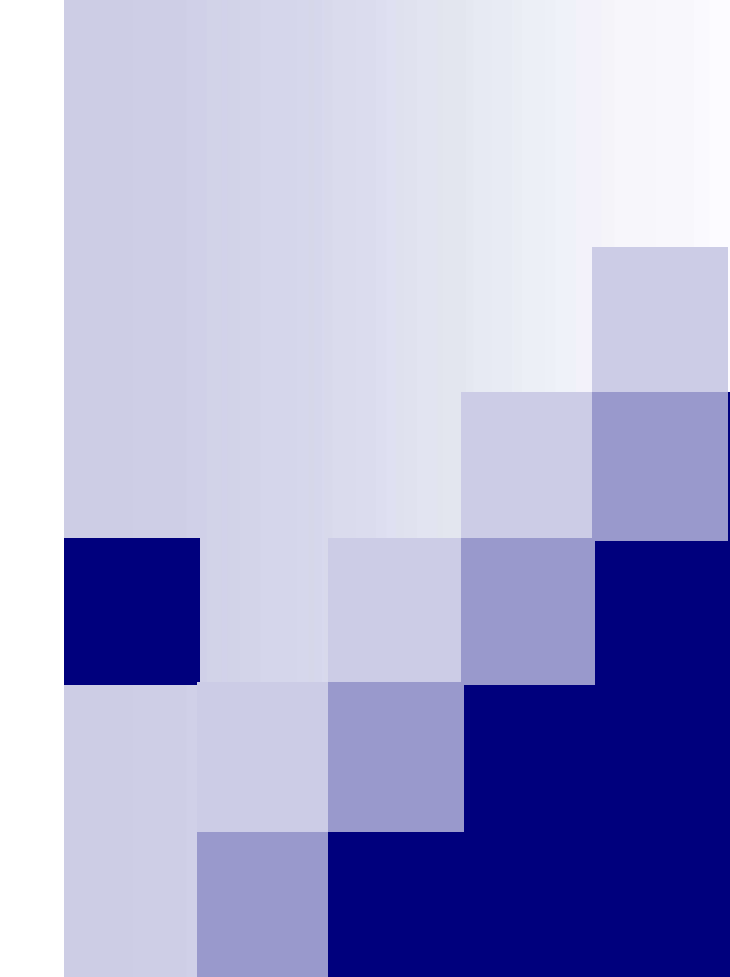




Сигналар теориясы

Векторлардың сызықтық тәуелсіздігі

$$\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1} \in \mathbf{F}^n$$

векторларының жиыны сызықты тәуелді болады, егер олардың сызықтық комбинациясы

$$\lambda_0 \mathbf{a}_0 + \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \mathbf{a}_{n-1} \neq \mathbf{0} \quad \text{немесе} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$$

кез келген $\lambda_i \in \mathbf{F}$ үшін, бір уақытта нөлге тең емес.

Сызықты тәуелсіз болады егер, $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{a}_0 = (-\lambda_1 / \lambda_0) \mathbf{a}_1 + (-\lambda_2 / \lambda_0) \mathbf{a}_2 + \dots + (-\lambda_{n-1} / \lambda_0) \mathbf{a}_{n-1}.$$

Мысал 1: Сызықтық тәуелсіз векторлар

Векторлар:

$$v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)$$

Тексеру:

Сызықтық тәуелсіздік шарты бойынша:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$$

Орнына қоямыз:

$$c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (0, 0)$$

Теңдеу:

$$(c_1, 0) + (0, c_2) = (0, 0)$$

Бұл:

$$c_1 = 0, c_2 = 0$$

Мысал 2: Сызықтық тәуелді векторлар

Векторлар:

$$v_1 = (1, 2), v_2 = (2, 4)$$

Тексеру:

Сызықтық тәуелсіздік шарты бойынша:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$$

Орнына қоямыз:

$$c_1(1, 2) + c_2(2, 4) = (0, 0)$$

Теңдеулер жүйесі:

$$c_1 + 2c_2 = 0 \quad 2c_1 + 4c_2 = 0$$

Екінші теңдеуді 2-ге бөліп:

$$c_1 + 2c_2 = 0$$

Бұл екі теңдеу бірдей, яғни $c_2 = -\frac{c_1}{2}$. Демек, c_1 және c_2 нөлден өзгеше болуы мүмкін, сондықтан v_1 және v_2 **сызықтық тәуелді**.

Мысал 3: Матрицамен тексеру

Векторлар:

$$v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (0, 1, -1), v_3 = (2, -1, 3)$$

Матрица құрайық:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

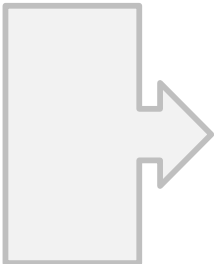
Матрицаның рангісін табу керек. Егер рангі 3-ке тең болса (векторлар саны), олар сызықтық тәуелсіз. Егер рангі аз болса, олар сызықтық тәуелді.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Сигнал кеңістігінің құрылымдық қасиеттері

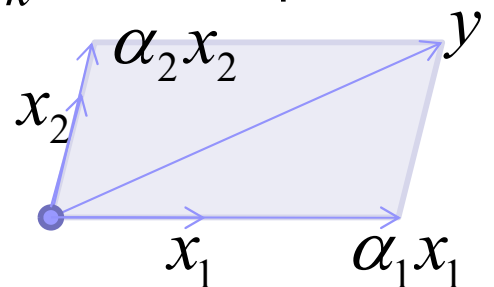
Векторларды қосу және векторды скалярға көбейту анықталғандықтан, ерікті векторлардың ақырлы жиынының сызықтық комбинациясы да анықталады:

векторлар $\{x_k, k = \overline{1, N}\}$
скалярлар $\{\alpha_k, k = \overline{1, N}\}$



$$y = \sum_{k=1}^N \alpha_k x_k$$

вектор



Векторлар жиыны $\{v_k, k = \overline{1, N}\}$ сызықтық тәуелсіз, егер

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k v_k = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \alpha_k = 0 \quad \forall k = \overline{1, N}$$

Салмақ коэффициенттерінің барлық мүмкін жиындары бар берілген векторлар жиынының барлық сызықтық комбинацияларының жиыны оның (жиынының) сызықтық қабығын құрайды:

$$\begin{array}{ll}
 \text{векторлар жиыны} & \{x_k, k = \overline{1, N}\} \\
 \text{скалярлардың} & \\
 \text{барлық мүмкін} & \{\{\alpha_k \in F\}, k = \overline{1, N}\} \\
 \text{жиындары} &
 \end{array}
 \xrightarrow{\quad}
 \left\{ y = \sum_{k=1}^N \alpha_k x_k \right\}
 \begin{array}{l}
 \text{векторлар} \\
 \text{жиыны}
 \end{array}$$

Сызықтық тәуелсіз векторлар жиынының сызықтық қабығы $\{y_k, k = \overline{1, N}\}$ N өлшемді сызықтық кеңістігі болып табылады

$\{y_k, k = \overline{1, N}\}$ бұл кеңістіктің базисі болып табылады

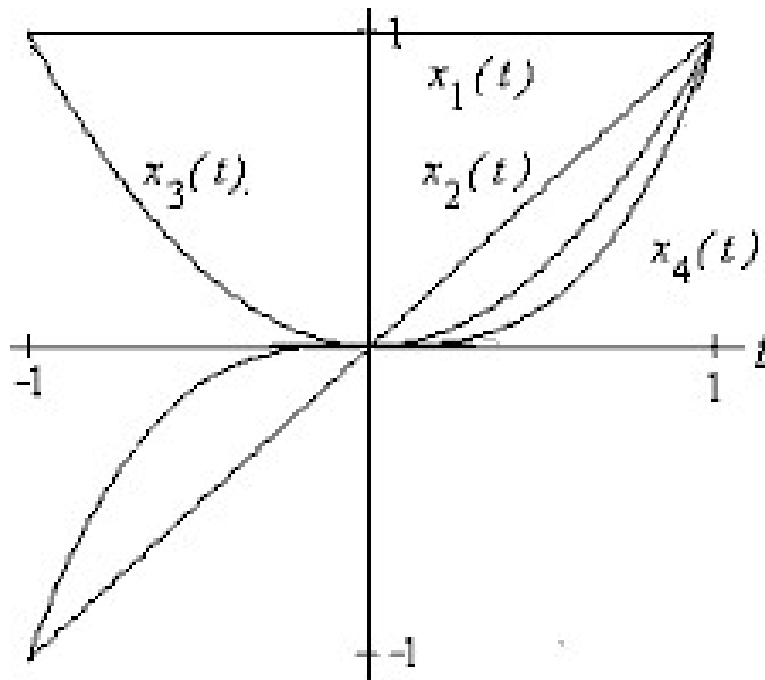
Кеңістіктік базис деп кез келген кеңістік векторын осы жиынға жататын векторлардың сызықтық комбинациясы арқылы көрсетуге болатындай сызықты тәуелсіз векторлар жиынын айтады.

Мысалы

Функциялар жиынын негізге алайық

$$S_4 = \left\{ x_1(t) = 1, x_2(t) = t, x_3(t) = t^2, x_4(t) = t^3 \right\}$$

$t \in [-1, 1]$ аралықта анықталады (сызықтық тәуелсіздік анық)



Бұл негіздің сызықтық аралығы форманың барлық функцияларынан тұратын төрт өлшемді кеңістік болып табылады

$$\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t^3$$

кезінде $t \in [-1, 1]$

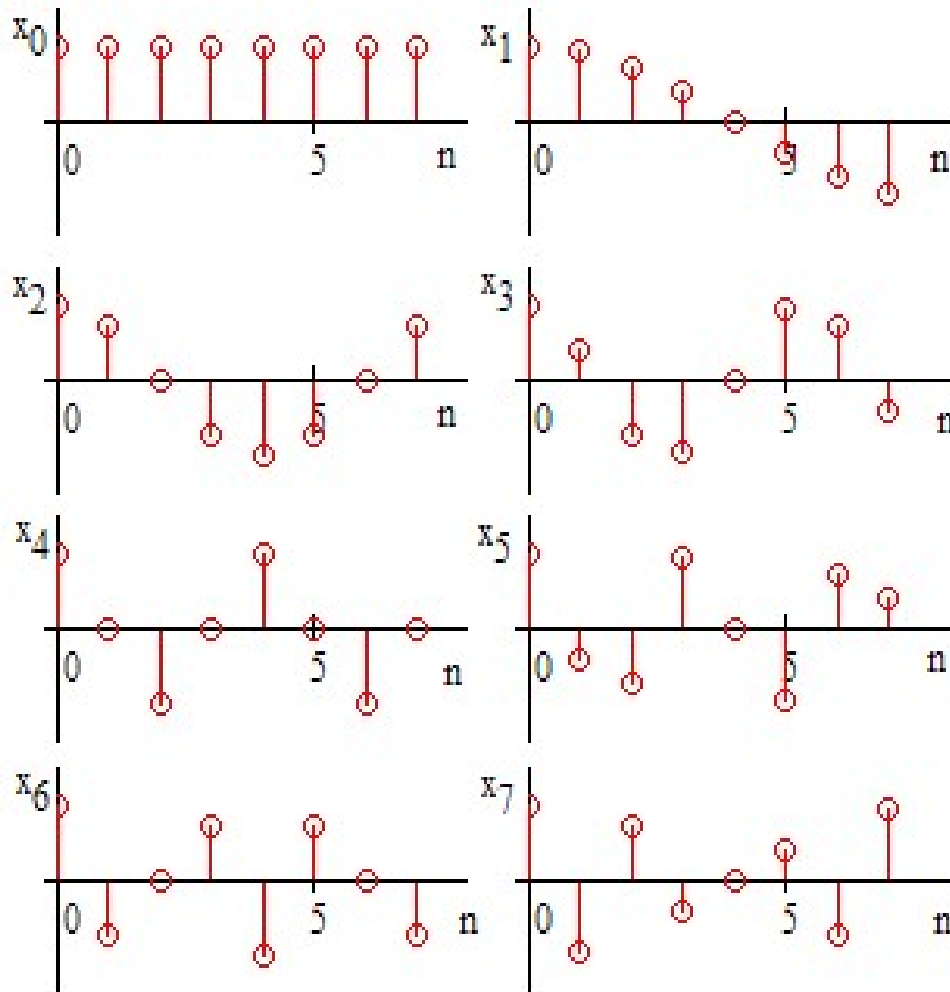
және әртүрлі коэффициенттер α_i

Мысалы

Бүтін айнымалы функциялар жиыны

$$Q_8 = \left\{ x_k[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{16}kn\right), k = \overline{0,7} \right\} \quad \text{кезінде} \quad n = \overline{0,7}$$

сызықтық тәуелсіз



Бұл негіздің сызықтық қабығы форманың барлық функцияларынан тұратын сегіз өлшемді кеңістік болып табылады

$$\sum_{k=0}^7 \alpha_k \cos\left(\frac{2\pi}{16}kn\right), \quad n = \overline{0,7}$$

α_i коэффициенттердің барлық түрлерімен

Сигнал кеңістігінің толық базистері

Шексіз өлшемді кеңістіктің базисі толық деп аталады, егер осы кеңістіктен кез келген вектор (сигнал) базистік векторлардың сызықтық комбинациясы арқылы ұсынылуы мүмкін болса.

Басқаша айтқанда, егер оның сызықтық аралығы бүкіл кеңістікке сәйкес келсе, базис аяқталды.

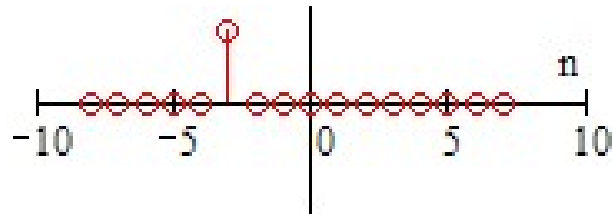
Сигнал кеңістігінің толық базисі

Берілген барлық дискретті сигналдардың кеңістігі

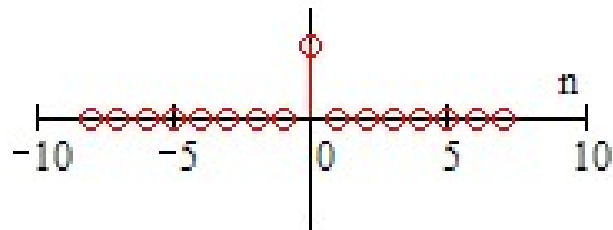
$$n = \overline{-\infty, \infty}$$

Бұл кеңістіктің толық базистерінің бірі

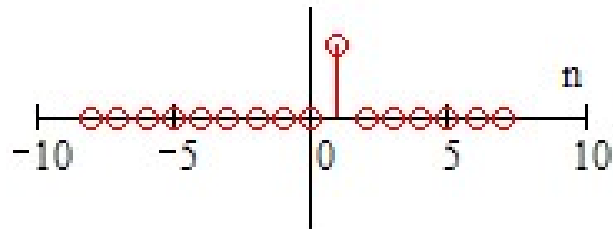
$$\{\delta[n-k], k = \overline{-\infty, \infty}\}$$



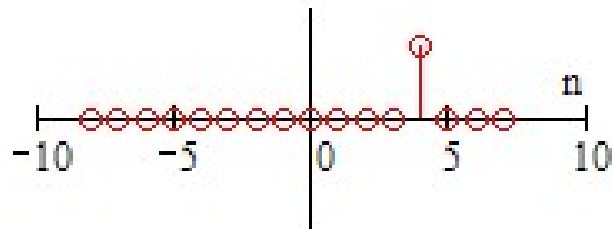
$$k = -3$$



$$k = 0$$



$$k = 1$$



$$k = 4$$

Кез келген дискретті
сигнал ретінде ұсынылуы
мүмкін

$$\begin{aligned} x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \delta[n-k] \end{aligned}$$

Сигнал кеңістігінің толық базисі

Барлық екілік векторлардың жиыны $B_8 = \{b_k, k = \overline{1,8}\}$

мұнда $b_k \in \{0;1\}$ мысалы $(0,0,1,1,1,0,1,0)$

элементтердің соңғы жиынын ғана қамтиды (атап айтқанда 256)

оны сызықтық кеңістік ретінде қарастыруға болады, егер векторларды қосу олардың құрамдас бөліктерін модуль 2 қосу арқылы анықталса, ал Галуа өрісі деп аталатын F өріс скалярлар өрісі ретінде алынса. $GF^2 = \{0;1\}$

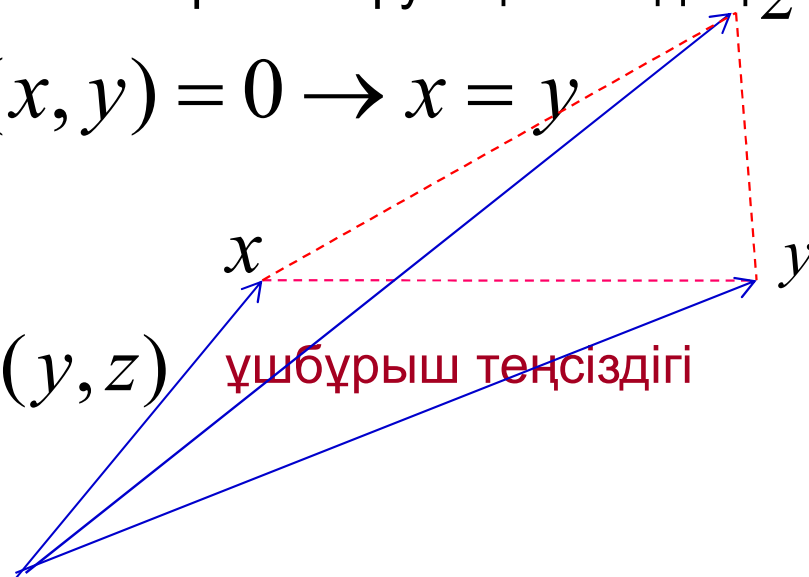
Мұндай кеңістіктер өте маңызды рөл атқарады, мысалы, байланыс теориясының маңызды бөлігі болып табылатын кодтау теориясында. Бұл кеңістіктің негізі ретінде кез келген 8 сызықты тәуелсіз нөлдік емес векторлар алынуы мүмкін

Метрика

$d(x, y)$ метрикалық - функциялар жұбын қашықтық деп аталатын санмен байланыстыратын функционалдық z

Қасиеттері

- 1) $d(x, y) \geq 0$ $d(x, y) = 0 \rightarrow x = y$
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$
- 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$



$$d(x, y) = \left(\int_0^T |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

$$d(x, y) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] - y[n]|^2 \right)^{1/2}$$

Норма

норма - функцияны санмен сәйкестендіретін функция (вектордың ұзындығына сәйкес)

Қасиеттері

$$1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \|x\| = 0 \rightarrow x = \vec{0}$$

$$2) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

үшбұрыш теңсіздігі

$$3) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$\|x\| = \sqrt{\int_0^T |x(t)|^2 dt} = \sqrt{E_x}$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2}$$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\int_0^T |x(t)|^p dt}$$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^p}$$

Норма және метрика

Норма аксиомалары мен метрика арасындағы айқын ұқсастықты ескере отырып, метрика көбінесе (бірақ әрқашан емес!) векторлар айырмасының нормасы ретінде анықталады.

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

l_2 кеңістігінде

$$\|x\| \longleftrightarrow d(x, y) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] - y[n]|^2 \right)^{1/2}$$

L_2 кеңістігінде

$$\|x\| \longleftrightarrow d(x, y) = \left(\int_0^T |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

Скалярлық көбейтінді

Векторлардың скаляр көбейтіндісі функционалды болып табылады (x, y)

$$1) \quad (x, y) = (y, x)^*$$

$$2) \quad (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$$

$$3) \quad (x, x) \geq 0; \quad (x, x) = 0 \rightarrow x = \vec{0}$$

1) және 2) ескеріп жаза аламыз

$$\begin{aligned} (x, \alpha y + \beta z) &= (\alpha y + \beta z, x)^* = \alpha^*(y, x)^* + \beta^*(z, x)^* = \\ &= \alpha^*(x, y) + \beta^*(x, z) \end{aligned}$$

Скаляр көбейтіндісі арқылы норманы орнатуға болады

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

Норма арқылы метриканы орнатуға болады

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Ішкі туындысы және ол арқылы тудыратын нормасы мен метрикасы бар кеңістік, егер ол толық болса*, **Гильберт кеңістігі** деп аталады.

*Кеңістік толық, егер жинақталатын тізбектердің шектерін қамтитын болса.

Гильберт кеңістігі

Скалярлық көбейтіндімен шектелген $(0, T)$ аралықта берілген шектеулі энергияның аналогтық сигналдарының жиынтығы

$$(x, y) = \int_0^T x(t) y^*(t) dt$$

нормасы

$$\|x\| = \sqrt{\int_0^T |x(t)|^2 dt}$$

және метрикасы

$$d(x, y) = \sqrt{\int_0^T |x(t) - y(t)|^2 dt}$$

Гильберт кеңістігі болып табылады

Шексіз интервал кезінде

$$L_2(T)$$

$$L_2(-\infty, +\infty)$$



David Hilbert
(1862-1943)

Гильберт кеңістігі

Шексіз ұзындықтағы дискретті сигналдар (тізбектер) жиыны Гильберт кеңістігіне айналады, егер скаляр көбейтіндісі өрнекпен анықталса.

$$(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n]$$

норма және метрикасы

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2} \quad d(x, y) = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] - y[n]|^2}$$

квадратты жиынтық l_2 тізбектердің Гильберт кеңістігі болып табылады

Гильберт кеңістігі

Скалярлық көбейтіндінің анықтамасы Коши-Буняковский-Шварц теңсіздігін білдіреді

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

деп қайта жазуға болады

$$\frac{|(x, y)|}{\|x\| \|y\|} \leq 1$$

сондықтан нақты сигналдар жұбы үшін олардың арасындағы бұрышты өрнек арқылы анықтауға болады

Екі шекті жағдай:

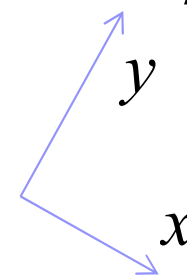
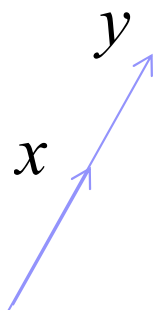
$$(x, y) = \|x\| \|y\|$$

бірдей формадағы сигналдар

$$(x, y) = 0$$

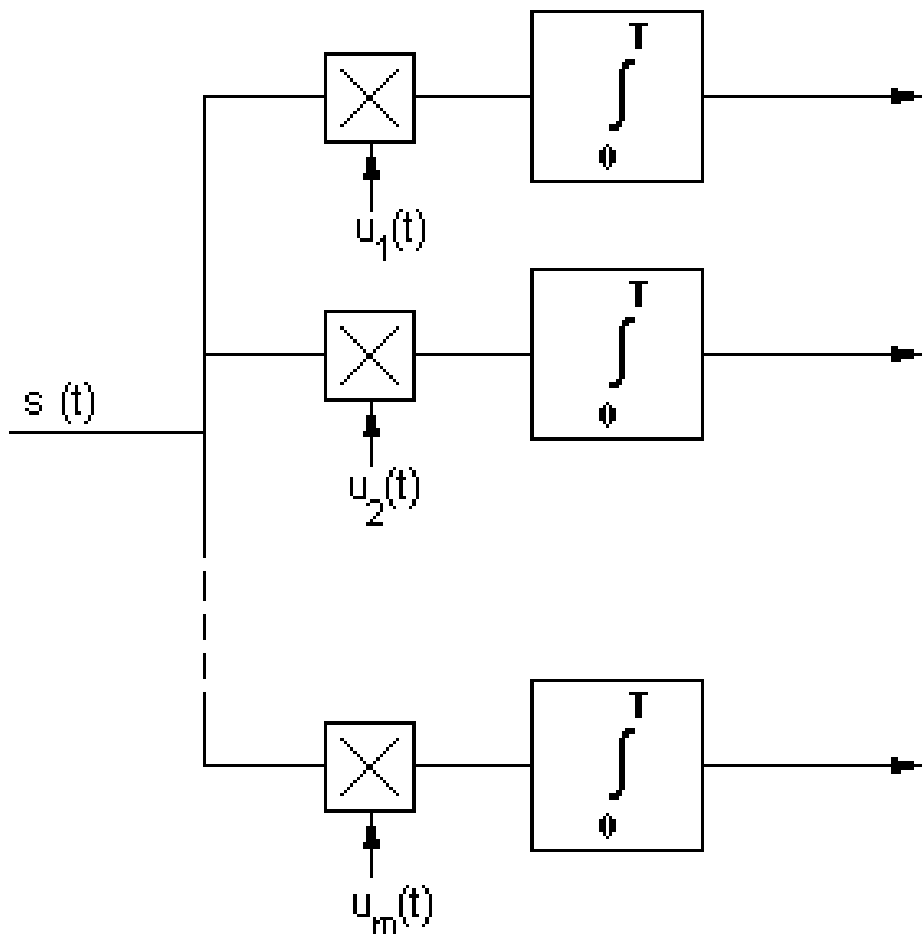
ортогоналды сигналдар

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$$



Ортогональды сигналдары бар байланыс жүйесінің қабылдағыш құрылымы

$$s(t) = u_k(t) + \xi(t)$$



Ортогональдылық жоғары шу иммунитетін қамтамасыз етеді
 ∞ -өлшемді кеңістікте өзара ортогональды сигналдар саны шексіз!

Скалярлы көбейтінді

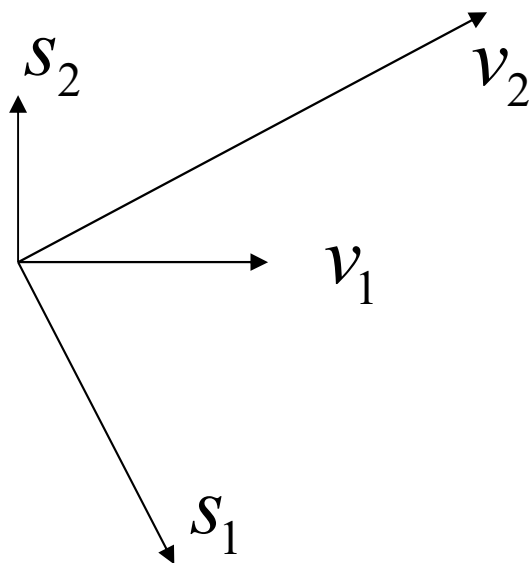
берілген негізде ерікті вектордың кеңею коэффициенттерін табуға мүмкіндік береді

$\{v_k, k = \overline{1, N}\}$ берілген базис

$$x = \sum_{k=1}^N \alpha_k v_k$$

$\{s_k, k = \overline{1, N}\}$ біріккен өзара базис

$$(v_k, s_m) = \delta_{km} \quad \text{мұнда} \quad \delta_{km} = \begin{cases} 1, k = m \\ 0, k \neq m \end{cases}$$



$$\begin{aligned} (x, s_m) &= \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k v_k, s_m \right) = \sum_{k=1}^N \alpha_k (v_k, s_m) = \\ &= \sum_{k=1}^N \alpha_k \delta_{km} = \alpha_m \end{aligned}$$

Детерминистің сигналдың энергетикалық сипаттамалары

- Сигналдың негізгі энергетикалық сипаттамалары $t_1 \leq t \leq t_2$ аралығында - $P(t)$ лездік қуат, E энергия және P_{cp} орташа қуат.

$$P(t) = S^2(t)$$

$$E = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt ,$$

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt$$

Көптеген мәселелерді шешу үшін күрделі сигналдарды уақыт функциясымен сипатталған қарапайым, жақсы зерттелген қарапайым сигналдардың жиынтығы ретінде ұсыну қажет:

$$S(t) = \sum_{k=0}^n C_k \varphi_k(t) .$$

$$\int_{t_1}^{t_2} S(t) \varphi(t) dt = 0 ,$$

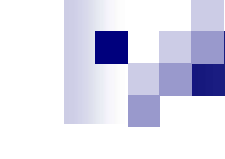
Фурье қатары

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\Omega_1 t) + b_k \sin(k\Omega_1 t)],$$

$$k = 1, 2, \dots, \quad \Omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi F_1 \quad F_1 = \frac{1}{T}; \quad k\Omega_1 \quad (k > 1)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\Omega_1 t) dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\Omega_1 t) dt$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt, \quad b_0 = 0$$


$$s(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(k\Omega_1 t + \Psi_k)],$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} - \text{амплитуда},$$

$$\Psi_k = -\operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k} - \text{бастапқы фаза}$$

Периодты емес сигналдар спектрі. Фурье түрлендірулері

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(f) e^{j2\pi f t} df \quad \text{Кері Фурье түрлендірулері}$$

$$\dot{S}_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad \text{Тура Фурье түрлендірулері}$$



Бақылау сұрақтары

1. Векторлардың сызықтық тәуелсіздігі туралы жазыңыз
2. Кеңістіктік базис ұғымын түсіндіріңіз
3. Метрика туралы жазыңыз
4. Норма туралы жазыңыз
5. Гильберт кеңістігі туралы жазыңыз
6. Ортогональды сигналдары бар байланыс жүйесінің қабылдағыш құрылымын сызыңыз. Ортогональді сигналдар туралы түсіндіріңіз.
7. Фурье қатарын жазыңыз
8. Периодты емес сигналдар үшін Фурье түрлендіруін жазыңыз.